Ley del Coseno

El teorema del coseno, denominado también como ley de cosenos, es una generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos que se utiliza, normalmente, en trigonometría.

Ley del coseno

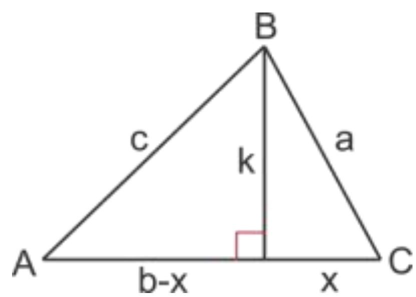
Dado un triángulo ABC, siendo α, β, γ, los ángulos, y *a*, *b*, *c*, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

La Ley de Cosenos se puede usar para calcular el tercer lado de un triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo incluido de un triángulo.

Ejemplo 1.

Considera el siguiente triángulo no rectángulo en el que conocemos *a, b* y *c*. Podemos dibujar una altura desde *B* para crear dos triángulos más pequeños como se muestra, donde *x* representa la longitud del segmento desde *C* hasta la base de la altura y $b - x$ representa la longitud del resto del lado opuesto al ángulo *B.*



Ahora podemos usar el Teorema de Pitágoras para relacionar las longitudes de los segmentos en cada uno de los triángulos rectángulos que se muestra.

Triángulo 1: $x^2 + k^2 = a^2$ o $k^2 = a^2 - x^2$

Triángulo 2: $(b - x)^2 + k^2 = c^2$ o $k^2 = c^2 - (b - x)^2$

Ya que ambas ecuaciones son iguales a k^2 , podemos igualarlas y simplificar:

$$a^2 - x^2 = c^2 - (b - x)^2$$
$$a^2 - x^2 = c^2 - (b^2 - 2bx + x^2)$$
$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx \; a^2$$
$$+ b^2 - 2bx = c^2$$

Recuerda que sabemos los valores de *a* y *b* y la medida del ángulo *C.* No sabemos la medida de *x.* Podemos usar la razón del coseno como se muestra a continuación para encontrar una expresión para *x* en términos de lo que ya conocemos.

$\cos C = \frac{x}{a}$; x=a.cos

Finalmente, podemos reemplazar *x* en la ecuación para obtener la Ley de Cosenos:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2$$

Recuerda que a y b son los lados del ángulo C en la fórmula

La Ley de Cosenos, $a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, se puede reorganizar para facilitar el cálculo de la medida del ángulo cuando *a*, *b* y *c* son todas longitudes conocidas.

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$C = \cos^{-1}\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ejemplo 2.

Dos corredoras entrenan a una velocidad de 7 kilómetros por hora. Llegan juntas a un cruce de caminos que forman entre sí un ángulo de 60° y cada una toma un camino. ¿Qué distancia las separará dentro de una hora?

En una hora, cada una habrá recorrido 9 kilómetros, por lo que formarán un triángulo con un ángulo de 60° y los dos lados adyacentes de 9 kilómetros. Para calcular la distancia que las separa basta con aplicar el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \propto = (7km)^2 + (7km)^2 - 2(7km)(7km)\cos 60°$$
$$a^2 = 49km^2 + 49km^2 - 49\ km^2 = 49km^2$$
$$a = \sqrt{49km^2}$$
$$\boldsymbol{a = 7km}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Encuentra C cuando $m\angle C = 80°$, $a=6$ y $b=12$

Solución:
Reemplazar las variables en la fórmula con la información y calcular *c* :
$C^2 = 6^2+12^2-2(6)(12).\cos 80°$
$C^2 \approx 154.995$
$C \approx \sqrt{154,995}$
$C \approx 12,4$

2. Encuentra a cuando $m\angle A = 43°$, $b=16$ y $c=22$

Solución: Esta vez, conocemos los lados que rodean al ángulo *A* y la medida del ángulo *A*. Podemos reescribir la fórmula como: $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos A$. Recuerda que la longitud por sí misma en un lado debe ser el lado opuesto al ángulo en la razón del coseno. Ahora podemos insertar nuestros valores y calcular *a*.

$a^2=16^2+22^2-2(16)(22).\cos 43°$
$a^2 \approx 225,127$
$a \approx \sqrt{225,127}$
$a \approx 15$

3. Pedro está haciendo un jardín floral triangular. Un lado está rodeado por la terraza y otro lado está rodeado por la cerca. Javier planea colocar un borde de piedra en el tercer lado. Si la longitud de la terraza es de 10 metros y la longitud de la cerca es de 15 metros y se encuentran en un ángulo de 100°, ¿Cuántos metros necesita crear del borde de piedra?

Solución: Sean las dos longitudes de los lados conocidos *a* y *b* y el ángulo entremedio es *C*. Ahora podemos usar la fórmula para encontrar *c*, la longitud del tercer lado.
$C^2= 10^2+15^2-2(10)(15).\cos 100°$
$C^2 \approx 377,094$
$C \approx \sqrt{377,094}$
$C \approx 19,4$

Entonces, Pedro necesita crear un borde de 19,4 metros

4. Encuentra "c" cuando $m\angle C = 75°$, $a=32$ y $b=40$

Solución :
$C^2= 32^2+40^2-2(32)(40).\cos 75°$
$C^2 \approx 1961,42$

C≈√ 1961,42

C≈44,3

5. Encuentra "b" cuando $m\angle B = 120°$, $a=11$ y $c=17$

Solución :

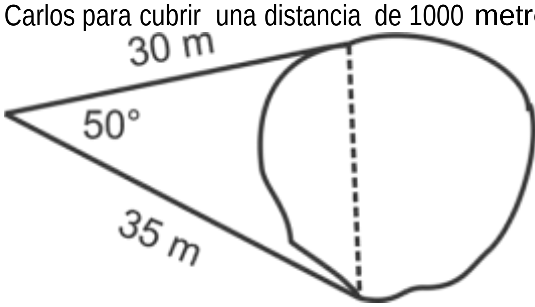
$b^2 = 11^2 + 17^2 - 2(11)(17).\cos 120°$

$b^2 \approx 597$

$b \approx \sqrt{597}$

b≈24,4

6. A Carlos le gusta nadar en un pequeño lago cercano a su casa. Para ejercitarse, nada desde un muelle ubicado en el lado norte del lago hasta otro muelle, ubicado en el lado sur. Un día decidió determinar la longitud que nadaba. Determina las distancias desde cada uno de los muelles hasta un punto en tierra y los ángulos entre los muelles desde tal punto eran 50°. ¿Cuántas vueltas necesita nadar Carlos para cubrir una distancia de 1000 metros?



Solución :

$C^2 = 30^2 + 35^2 - 2(30)(35).\cos 50°$

$C^2 \approx 775,46$

$C \approx \sqrt{775,46}$

$C \approx 27,84$

Ya que cada vuelta es de 27,84 metros, Carlos debe nadar

$$\frac{1000}{27,84} \approx 36 \text{ vueltas}$$

7. Encuentra la medida del ángulo mayor en el triángulo con lados de longitud 12, 18 y 21.

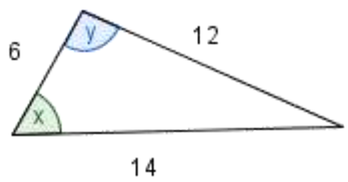
Solución: Primero, debemos determinar cuál ángulo será el mayor. Recuerda que en Geometría el lado de mayor longitud es opuesto al ángulo mayor. El lado de mayor longitud es 21, entonces sea $c = 21$ ya que C es el ángulo que estamos tratando de encontrar. Sea $a = 12$ y $b = 18$ y usa la fórmula para calcular C como se muestra. No importa qué lados asignamos a a y b. Son intercambiables en la fórmula.

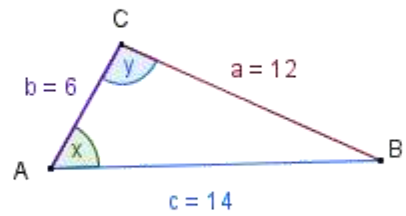
$$m\angle C = C = \frac{12^2+18^2-21^2}{2(12)(18)} = 86°$$

8. En el triángulo de la figura, hallar los ángulos x y y

Solución:

Como conocemos los tres lados del triángulo, podemos aplicar la ley de cosenos, así:





Hallando *x*

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$

$12^2 = 6^2 + 14^2 - 2\,(6)\,(14) \cos x$

$144 = 36 + 196 - 168 \cos x$

$168 \cos x = 36 + 196 - 144$

$\cos x = 88/168$

$\mathbf{x \approx 58.41°}$

Hallando *y*

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C$

$14^2 = 12^2 + 6^2 - 2\,(12)\,(6) \cos y$

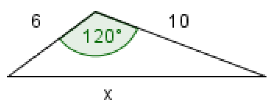
$196 = 144 + 36 - 144 \cos y$

$144 \cos y = 144 + 36 - 196$

$\cos y = -16/144$

$\mathbf{y \approx 96.38°}$

9. Encuentra $m\angle A$, $a=10$, $b=15$ y $c=21$



Solución: Primero, volvamos a ordenar la fórmula para reflejar los lados dados y el ángulo pedido:

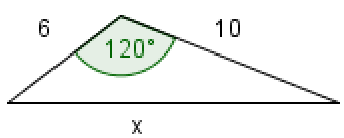
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2(b)(c)}$$

Ahora inserta nuestros valores

$$m\angle A = \cos^{-1}\frac{15^2 + 21^2 - 10^2}{2(15)(21)} \approx 26^\circ$$

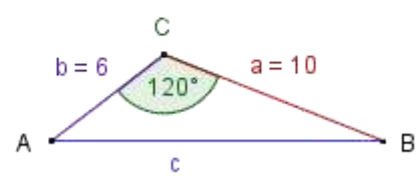
10

En el triángulo de la figura, hallar la longitud del lado rotulado con *x*



Solución:

Como conocemos dos lados adyacentes y el ángulo entre ellos, podemos aplicar la ley de cosenos, así



$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$

$x^2 = 10^2 + 6^2 - 2\,(10)\,(6) \cos 120°$

$x^2 = 100 + 36 - 120 - 1\ 2$

$x^2 = 100 + 36 - 120 - 1\ 2$

$x^2 = 100 + 36 + 60$

$x^2 = 196$

$x = 14$

Glosario

Otras Referencias
http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/ley_cos/ley_cos.html
https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_coseno